

Aufgabe 4 Turing-Maschinen

Es soll eine Turingmaschine konstruiert werden, welche das Wort a^n vom Band liest und anschließend das Wort a^{n^2} auf das Band schreibt.

Konstruktion

Die im Anschluss definierte Dreibandturingmaschine soll das Problem durch folgende Arbeitsweise lösen. Zunächst wird das Ausgangswort vom ersten Band gelöscht und auf die beiden anderen Bänder kopiert. Im folgenden wird, so lange auf dem dritten Band Zeichen gelesen werden können, das Wort vom zweiten Band auf das erste Band kopiert, wobei es hinter dort ggf. schon bestehende Wörter geschrieben wird.

Im Detail soll die Dreibandturingmaschine folgendermaßen arbeiten:

Zunächst liest die TM auf dem ersten Band jeweils ein Zeichen und schreibt diese sofern es sich um ein „a“ handelt auf das zweite und dritte Band. Auf dem ersten Band wird ein Blank geschrieben und die Zeiger aller Bänder werden einen Schritt nach rechts versetzt. Wird ein Blank gelesen, so werde die Zeiger auf dem zweiten und dritten Band nach links versetzt und die TM geht in einen neuen Zustand über in dem der Zeiger auf dem zweiten und dritten Band so lange nach links versetzt werden, bis auf dem zweiten Band ein Blank gelesen wird. Tritt dies ein, so werden die Zeiger auf diesen Bändern erneut nach rechts versetzt und die TM geht in einen neuen Zustand über, in dem sie mit der eigentlichen konstruktion des Wortes a^n beginnt.

Kann die TM auf dem dritten Band ein „a“ lesen, so ersetzt sie diese durch ein Blank und beginnt in einem neuen Zustand Zeichen auf dem zweiten Band zu lesen. Handelt es sich um ein „a“ so wird diese auf das erste Band kopiert und die Zeiger auf beiden Bändern nach rechts versetzt. Sobald ein Blank gelesen wird, versetzt die TM den Zeiger auf den dritten Band nach links, bis erneut ein Blank gelesen wird. Der Zeiger auf dem zweiten Band wird dann einen Schritt nach rechts verschoben und die TM versucht erneut auf dem dritten Band ein „a“ zu lesen. Dies wird vortgesetzt, bis die TM auf dem dritten Band ein Blank liest. In diesem Fall geht die TM in einen neuen Zustand über, in dem sie den Zeiger auf dem ersten Band zunächst so lange nach links verschiebt, bis ein Blank gelesen wird. Dann wird der Zeiger einen Schritt nach rechts versetzt und steht dann auf dem ersten Zeichen des konstruierten Wortes. Die TM hält an.

Im Sonderfall, dass es sich bei dem Wort a^n um das leere Wort handelt, geht die TM direkt in den Endzustand über.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine 3-Band-Turing-Maschine, mit

$$Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_E\},$$

$$E = \{z_E\},$$

$$\Sigma = \{a\},$$

$$\Gamma = \{a, \square\},$$

und sei δ definiert durch:

$$\delta(z_0, \square, \square, \square) = \{(z_E, \square, \square, \square, N, N, N)\} \text{ (Bei leerem Ausgangswort in den Endzustand übergehen.)}$$

$$\delta(z_0, a, \square, \square) = \{(z_1, \square, a, a, R, R, R)\} \text{ (Ausgangswort auf Band 2 und 3 kopieren und dabei löschen.)}$$

$$\delta(z_1, a, \square, \square) = \{(z_1, \square, a, a, R, R, R)\}$$

$$\delta(z_1, \square, \square, \square) = \{(z_2, \square, \square, \square, N, L, L)\}$$

$$\delta(z_2, \square, a, a) = \{(z_2, \square, a, a, N, L, L)\}$$

$$\delta(z_2, \square, \square, \square) = \{(z_3, \square, \square, \square, N, R, R)\}$$

$$\delta(z_3, \square, a, a) = \{(z_4, a, a, \square, R, R, R)\}$$

$$\delta(z_4, \square, a, a) = \{(z_4, a, a, a, R, R, N)\} \text{ (Wort von Band 2 auf Band 1 kopieren)}$$

$$\delta(z_4, \square, a, \square) = \{(z_4, a, a, \square, R, R, N)\}$$

$$\delta(z_4, \square, \square, a) = \{(z_5, \square, \square, a, N, L, N)\}$$

$$\delta(z_4, \square, \square, \square) = \{(z_5, \square, \square, \square, N, L, N)\}$$

$$\delta(z_5, \square, a, a) = \{(z_5, \square, a, a, N, L, N)\}$$

$$\delta(z_5, \square, a, \square) = \{(z_5, \square, a, \square, N, L, N)\}$$

$$\delta(z_5, \square, \square, a) = \{(z_3, \square, \square, a, N, R, N)\} \text{ (Es kann auf Band 3 ein „a“ gelesen werden. Kopieren wiederholen.)}$$

$$\delta(z_5, \square, \square, \square) = \{(z_6, \square, \square, \square, L, N, N)\} \text{ (Es kann auf Band 3 kein „a“ gelesen werden.)}$$

$\delta(z_6, a, \square, \square) = \{(z_6, a, \square, \square, L, N, N)\}$ (Auf Band 1 den Zeiger auf das erste Zeichen des Wortes setzen)
 $\delta(z_6, \square, \square, \square) = \{(z_E, \square, \square, \square, R, N, N)\}$

$\delta(\dots) = \emptyset$ sonst.

Beispielableitung

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} z_0 \begin{pmatrix} aa \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_0, a, \square, \square) = \{(z_1, \square, a, a, R, R, R)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \\ a \\ a \end{pmatrix} z_1 \begin{pmatrix} a \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_1, a, \square, \square) = \{(z_1, \square, a, a, R, R, R)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square \\ aa \\ aa \end{pmatrix} z_1 \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_1, \square, \square, \square) = \{(z_2, \square, \square, \square, N, L, L)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square \\ a \\ a \end{pmatrix} z_2 \begin{pmatrix} \square \\ a \square \\ a \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_2, \square, a, a) = \{(z_2, \square, a, a, N, L, L)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} z_2 \begin{pmatrix} \square \\ aa \\ aa \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_2, \square, a, a) = \{(z_2, \square, a, a, N, L, L)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} z_2 \begin{pmatrix} \square \\ \square aa \\ \square aa \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_2, \square, \square, \square) = \{(z_3, \square, \square, \square, N, R, R)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} z_3 \begin{pmatrix} \square \\ aa \\ aa \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_3, \square, a, a) = \{(z_4, a, a, \square, R, R, R)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square a \\ \square a \\ \square \square \end{pmatrix} z_4 \begin{pmatrix} \square \\ a \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_4, \square, a, a) = \{(z_4, a, a, a, R, R, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aa \\ \square aa \\ \square \square \end{pmatrix} z_4 \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_4, \square, \square, a) = \{(z_5, \square, \square, a, N, L, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aa \\ \square a \\ \square \square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ a \square \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, a, a) = \{(z_5, \square, a, a, N, L, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aa \\ \square \\ \square \square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ aa \square \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, a, a) = \{(z_5, \square, a, a, N, L, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aa \\ \epsilon \\ \square \square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ \square aa \square \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, \square, a) = \{(z_3, \square, \square, a, N, R, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aa \\ \square \\ \square \square \end{pmatrix} z_3 \begin{pmatrix} \square \\ aa \square \\ a \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_3, \square, a, a) = \{(z_4, a, a, \square, R, R, R)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aaa \\ \square a \\ \square \square \square \end{pmatrix} z_4 \begin{pmatrix} \square \\ a \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_4, \square, a, \square) = \{(z_4, a, a, \square, R, R, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aaaa \\ \square aa \\ \square \square \square \end{pmatrix} z_4 \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_4, \square, \square, \square) = \{(z_5, \square, \square, \square, N, L, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aaaa \\ \square a \\ \square \square \square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ a \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, a, \square) = \{(z_5, \square, a, \square, N, L, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \square aaaa \\ \square \\ \square \square \square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ aa \square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, a, \square) = \{(z_5, \square, a, \square, N, L, N)\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \square\squareaaaa \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_5 \begin{pmatrix} \square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_5, \square, \square, \square) = \{(z_6, \square, \square, \square, L, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square\squareaaaa \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_6 \begin{pmatrix} a\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_6, a, \square, \square) = \{(z_6, a, \square, \square, L, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square\squareaa \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_6 \begin{pmatrix} aa\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_6, a, \square, \square) = \{(z_6, a, \square, \square, L, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square\square a \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_6 \begin{pmatrix} aaa\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_6, a, \square, \square) = \{(z_6, a, \square, \square, L, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square\square \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_6 \begin{pmatrix} aaaa\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_6, a, \square, \square) = \{(z_6, a, \square, \square, L, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_6 \begin{pmatrix} \square aaaa\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix} \vdash (\text{mit } \delta(z_6, \square, \square, \square) = \{(z_E, \square, \square, \square, R, N, N)\}) \\
 & \begin{pmatrix} \square\square \\ \epsilon \\ \square\square\square \end{pmatrix} z_E \begin{pmatrix} aaaa\square \\ \square aa\square \\ \square \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$