Aufgabe 2 *Abschluss unter Hiding*

Zu Zeigen: L kontextfrei $\Rightarrow L\backslash a$ für $a \in \Sigma$.

Sei L kontexfrei.
Folglich gibt es eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chromsky-Normalform für die gilt: $L(G) = L$
Sei $G' = (V, \Sigma, P', S)$ mit $P' = \{A \to x | A \to x \in P, x \neq a\} \cup \{A \to \epsilon | A \to x \in P, x = a\}$

Zu G' gibt es nach Vorlesung 2, Folie 22 eine äquivalente kontextfreie Grammatik, da G nach Definition nur Regeln der Form $A \to u$ mit $A \in V, u \in (V \cup \Sigma)^*$ enthält.

zu Zeigen: $L(G') = L\backslash a$

1.) $L\backslash a \subseteq L(G')$

$u \in L\backslash a$
$\Rightarrow u \in L(G)\backslash a$ (Nach Vorraussetzung)
$\Rightarrow u \in \{w \in \Sigma^* | S \Rightarrow_G^* w\}\backslash a$
$\Rightarrow u \in \{w\backslash a \in \Sigma^* | S \Rightarrow_G^* w\}$
$\Rightarrow u \in \{w\backslash a \in \Sigma^* | S \Rightarrow_{G'}^* w\backslash a\}$ (Da G' genau dort wo G das Zeichen a erzeugt das Zeichen ϵ erzeugt.)
$\Rightarrow u \in L(G')$

2.) $L(G') \subseteq L\backslash a$

$u \in L(G')$
$\Rightarrow u \in \{w\backslash a \in \Sigma^* | S \Rightarrow_{G'}^* w\backslash a\}$
$\Rightarrow u \in \{w\backslash a \in \Sigma^* | S \Rightarrow_G^* w\}$ (Da G' genau dort wo G das Zeichen a erzeugt das Zeichen ϵ erzeugt.)
$\Rightarrow u \in \{w \in \Sigma^* | S \Rightarrow_G^* w\}\backslash a$
$\Rightarrow u \in L(G)\backslash a$
$\Rightarrow u \in L\backslash a$ (Nach Vorraussetzung)

Es gibt folglich falls es zu L eine kontextfreie Grammatik gibt die diese Sprache erzeigt auch zu $L\backslash a$ eine kontextfreie Grammatik die diese Sprache erzeugt.

q.e.d.